

# Bode-Diagramme

Selten misst man ein vorhandenes Zweipolnetzwerk aus, um mit den Daten Amplituden- und Phasengang zu zeichnen. Das kommt meistens nur vor wenn Filter abgeglichen werden müssen oder man die berechneten Eckdaten eines Hi-Fi-Verstärkers am realen Objekten kontrollieren will. Viel eher wird man in der Entwurfphase anhand einer Schaltungsskizze den Phasen- und Amplitudengang wissen wollen. Hier möchte ich einige Möglichkeiten anhand eines Hochpass aufzeigen, wie man dabei vorgehen kann.

## Komplexe Zahlen:

Für das Rechnen mit Wechselstromgrößen sind komplexe Zahlen das übliche Werkzeug. Komplexe Zahlen setzen sich aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammen ( $c=a+jb$ ;  $a$  ist der Realteil  $Re\{c\}$  und  $b$  ist der Imaginärteil  $Im\{c\}$ ).  $j$  ist definiert als die Wurzel aus  $-1$ . Im Gegensatz zu den reellen Zahlen, die sich auf einem Zahlenstrahl darstellen lassen, wird zur Darstellung komplexer Zahlen eine Zahlenebene benötigt. Die komplexe Zahl ist dann ein Punkt in dieser Ebene, ihr Betrag ihr Ortsvektor und der Winkel  $\varphi$ , der Winkel zwischen Ortsvektor und positiver  $Re\{\}$ -Achse. Als häufige Operationen benötigen wir für die Übertragungsfunktion den Betrag einer komplexen Größe und ihr Winkel zur positiven  $Re\{\}$ -Achse.

Betrag	Winkel
$ c  = \sqrt{Re\{c\}^2 + Im\{c\}^2}$	$\tan\varphi = \frac{Im\{c\}}{Re\{c\}}$

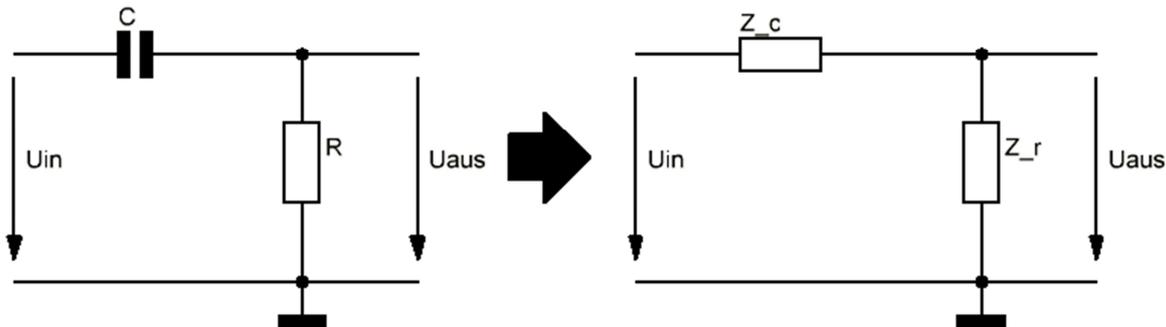
Wobei man beim Winkel beachten muss, dass das Ergebnis  $\varphi$  relativ zum momentanen Quadranten ist. Gesucht wird aber der absolute Wert von der positiven  $Re\{\}$ -Achse aus. In der Tabelle unten findet man für die gängigen drei Zweipole ihre komplexe Impedanz, wobei der ohmsche Widerstand nur einen Realteil, Kondensator und Induktivität hingegen nur einen Imaginärteil besitzen.

Widerstand	Kondensator	Induktivität
		
$Z = R$	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Z = j\omega L$

Näher möchte ich auf das Rechnen mit komplexen Zahlen nicht eingehen. Die Details findet man dann bei Interesse in den bekannten Büchern von Papula, Westermann und wie sie alle heißen.

### Aufstellen der Übertragungsfunktion:

Für das Aufstellen der Übertragungsfunktion reichen einfache Kenntnisse der komplexen Zahlen und die Spannungsteilerregel. Am einfachsten ist es, wenn man zuerst alle Zweipole durch Impedanzen ersetzt.



Für die komplexe Übertragungsfunktion  $F_{j\omega}$  ergibt sich damit analog zum (Gleich-)Spannungsteiler

$$F_{\omega} = \frac{U_{aus}}{U_{in}} = \frac{Z_r}{Z_c + Z_r}$$

und durch einsetzen der Impedanzen aus der Tabelle oben erhält man dann

$$F_{\omega} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \xrightarrow{\text{mit } j\omega C \text{ erweitern}} \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Der Amplitudengang ergibt sich dann aus dem Betrag der Übertragungsfunktion, der Phasengang aus dem Winkel zwischen Real- und Imaginärteil.

$$|F_{\omega}| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

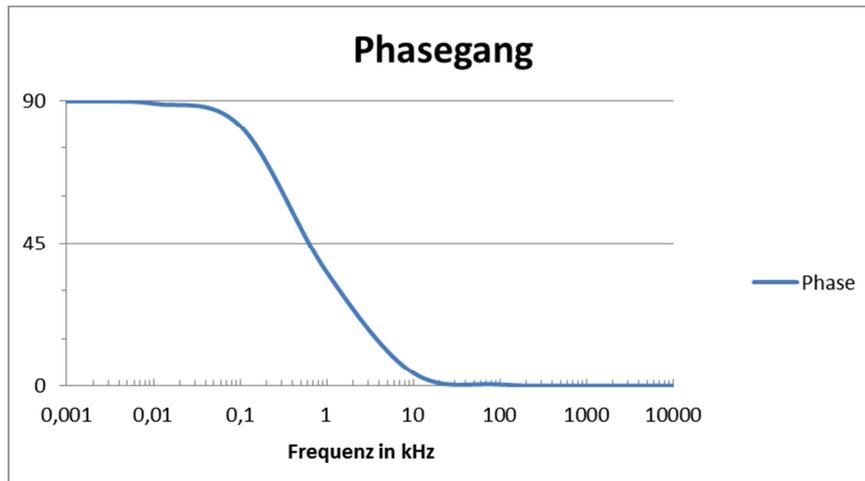
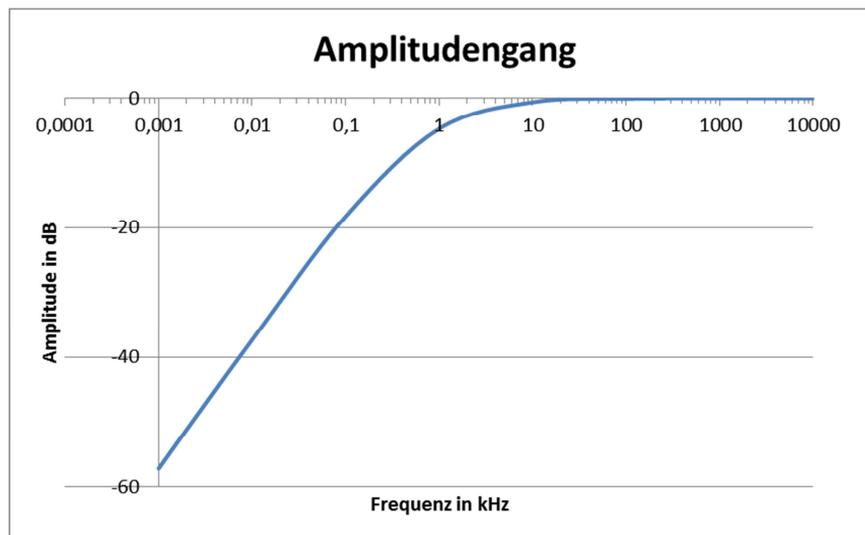
Wobei die Amplitude  $|F_{\omega}|$  für das Diagramm noch mit  $20 \cdot \log(|F_{\omega}|)$  in eine logarithmische Größe umgewandelt wird und in der Einheit dB angegeben wird.

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\text{Zähler}\}}{\operatorname{Re}\{\text{Zähler}\}} - \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\text{Nenner}\}}{\operatorname{Re}\{\text{Nenner}\}} = \arctan \frac{\omega RC}{0} - \arctan \frac{\omega RC}{1} \\ &= 90^\circ - \arctan(\omega RC) \end{aligned}$$

### Zeichnen der Kurven mit Excel:

Der Umgang mit Excel dürfte den meisten bekannt sein. Da Excel nicht für den Umgang mit komplexen Formeln gedacht ist, müssen wir unsere Übertragungsfunktion auf ihre einfachsten Bestandteile runterbrechen. Anschließend das Ganze in Excel eingeben, eine Tabelle daraus machen und am Ende noch die Graphen zeichnen.

	R in ohm	10000						
	C in F	0,000000022						
Frequenz	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
Zähler	0,0013823	0,013823008	0,13823008	1,38230077	13,8230077	138,230077	1382,30077	13823,0077
Nenner	1,0013823	1,013823008	1,13823008	2,38230077	14,8230077	139,230077	1383,30077	13824,0077
F <sub>ijw</sub>	0,00138039	0,013634537	0,121443	0,58023772	0,93253731	0,99281764	0,99927709	0,99992766
Amplitude in	-57,1999472	-37,3071919	-18,3125502	-4,72788083	-0,60667569	-0,06261027	-0,00628137	-0,00062834
Phase	89,9208001	89,20805044	82,1298734	35,8831642	4,13774921	0,41448852	0,04144957	0,00414496



### Zeichnen der Kurven mit Matlab:

Matlab ist ein Computerprogramm zum numerischen Lösen von (Differential)-Gleichungen. Auch der Umgang mit komplexen Zahlen ist für Matlab kein Problem, sodass man die komplexe Übertragungsfunktion direkt eingeben kann.

Der Quellcode kann dann so aussehen (in Matlab führen viele Wege ans Ziel):

```

%Bode-Diagramm eines Hochpass mit Matlab zeichnen

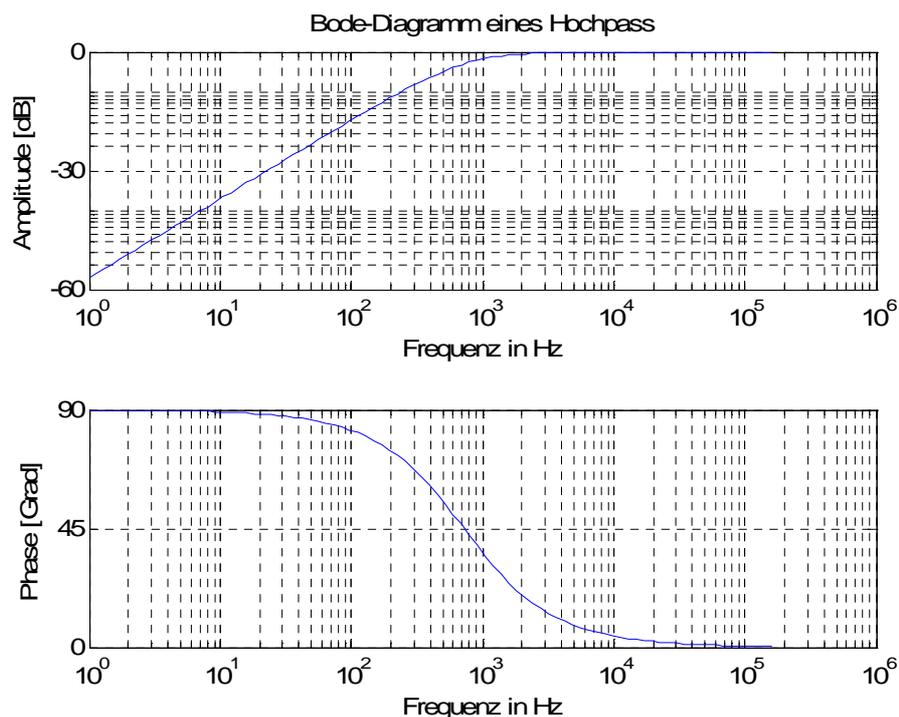
%Variablen
R = 10*(10^3);           % 10kohm
C = 22*(10^(-9));       % 22nF
tau = R*C;               % Zeitkonstante tau
omega = logspace (0, 6, 100); % Kreisfrequenz [rad/s]
freq = omega/(2*pi);     % Frequenz in Hz
%Übertragungsfunktion
frequenzgang_HP = (j*omega*tau).^((1+j*omega*tau).^(-1));

%Bode-Diagramme zeichnen
figure (1)               % Erzeugt Figure 1
clf                       % Löscht ggf. alte Plots
subplot (211)            % oberer Subplot: Amplitudengang
loglog (freq, abs(frequenzgang_HP)) % Amplitudengang
title ('Bode-Diagramm eines Hochpass') % Titel
xlabel ('Frequenz in Hz') % Achsenbeschriftung X
ylabel ('Amplitude [dB]') % Achsenbeschriftung Y
grid on;                 % Aktiviert Gitterlinien
xlim ([1 1e6])           % Skalierung x-Achse
skala = -60:30:0;        % Gewünschte Achsteilung
set (gca, 'ytick', 10.^(skala/20)) % Setzt Achsteilung (dB)
set (gca, 'yticklabel', skala) % Setzt Beschriftung

subplot (212)            % unterer Subplot: Phasegang
semilogx (freq, angle (frequenzgang_HP) *180/pi) % Phasengang HP
grid on
xlabel ('Frequenz in Hz') % Achsenbeschriftung X
ylabel ('Phase [Grad]') % Achsenbeschriftung Y
axis ([1 1e6 0 90])     % Skalierung x- und y-Achse
skala = 0:45:90;        % Gewünschte Achsteilung
set (gca, 'ytick', skala) % Setzt Achsteilung (Grad)
set (gca, 'yticklabel', skala) % Setzt Beschriftung

```

Und das Ergebnis sieht dann so aus:



Nachteilig bei Matlab sind die nötige Einarbeitungszeit und sein recht hoher Preis. Allerdings gibt es mit Octave und Scilab kostenlose Alternativen, die zwar nicht hundertprozentig kompatibel zur Matlabsyntax sind, aber sich recht stark daran anlehnen.

### **LT-Spice:**

Komplexe Rechnung ist nicht jeder Manns Sache. Aber für alle Mathematikmuffel gibt es auch einen leichten Weg ohne rechnen ans Ziel zu kommen. Mittels LT-Spice lassen sich auch für komplizierte Zweipolschaltungen die Diagramme für Phasen- und Amplitudengang zeichnen. Weiter möchte ich das an dieser Stelle nicht vertiefen. LT-Spice-Tutorielles findet man im Internet zur Genüge.